例題 51

別解

(1)

$f(x)=(x+1)^n$ とすると，$f(x)=(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}x^k{}_n\mathrm{C}_k$ より，

$f'(x)=n(x+1)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}kx^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k$

$\therefore f'(1)=n\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\cdot{}_n\mathrm{C}_k$

ゆえに，$\sum_{k=0}^{n}k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=n\cdot 2^{n-1}$

(2)

(1)より，$f''(x)=n(n-1)(x+1)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)x^{k-2}{}_n\mathrm{C}_k$

ここで，$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)x^{k-2}{}_n\mathrm{C}_k=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot x^{k-2}{}_n\mathrm{C}_k-\sum_{k=0}^{n}k\cdot x^{k-2}{}_n\mathrm{C}_k$

$\therefore n(n-1)(x+1)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot x^{k-2}{}_n\mathrm{C}_k-\sum_{k=0}^{n}k\cdot x^{k-2}{}_n\mathrm{C}_k$

$x=1$ を代入すると，

$n(n-1)2^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot{}_n\mathrm{C}_k-\sum_{k=0}^{n}k\cdot{}_n\mathrm{C}_k$

これと $\sum_{k=0}^{n}k\cdot{}_n\mathrm{C}_k=n\cdot 2^{n-1}$ より，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2\cdot{}_n\mathrm{C}_k&=n(n-1)2^{n-2}+n\cdot 2^{n-1}\\&=(n^2+n)2^{n-2}\end{aligned}$$